$$\Rightarrow \quad t = -\frac{V}{g}\log\left(1-\frac{v}{V}\right) \qquad ...(7)$$

अतः समी. (6) तथा (7) का उपयोग समी. (5) में करने पर हम पाते हैं कि

$$x = -\frac{V^2}{g}\log\left(1-\frac{v}{V}\right)-\frac{V^2}{g}\cdot\frac{v}{V}$$

$$\Rightarrow \quad gx = -vV - V^2\log\left(1-\frac{v}{V}\right).$$

नोट : x तथा v में सीधे सम्बन्ध प्राप्त करने के लिए समी. (1) में $\frac{dV}{dt}$ के लिए $v\frac{dV}{dx}$ का प्रयोग करें।

प्रमेय 3. एक कण एक प्रतिरोधी माध्यम में गुरुत्व के अधीन गिरता है तथा इसका प्रतिरोध वेग के वर्ग के अनुक्रमानुपाती है। गति प्राप्त कीजिए यदि कण विराम से गिरना प्रारम्भ करता है। (बिलासपुर 2008; रायपुर 05)

प्रमाण (Proof)— यहाँ प्रतिरोध वेग के वर्ग के अनुक्रमानुपाती है। अतएव गति का समीकरण होगा :

$$\frac{dv}{dt} = g - kv^2 \qquad ...(1)$$

अन्त्य वेग $\left(\frac{g}{k}\right)^{1/2}$ के लिए V लेने पर यह समीकरण निम्न रूप से परिवर्तित हो जाता है :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{V^2}(V^2 - v^2) \qquad ...(A)$$

इसका समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

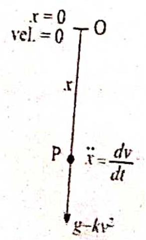
$$\frac{1}{2V}\log\frac{V+v}{V-v} = \frac{g}{V^2}t + C \qquad ...(2)$$

[जहाँ C समाकलन अचर है।]

प्रारम्भिक प्रतिबन्धों से, $v = 0$ जब $t = 0$. $\therefore C = 0$.

अतः समी. (2) से,

$$\log\frac{V+v}{V-v} = \frac{2g}{V}t$$



$$\Rightarrow \quad \frac{V+v}{V-v} = e^{\frac{2g}{V}t}$$

$$\Rightarrow \quad v = V\frac{1-e^{-\frac{2g}{V}t}}{1+e^{-\frac{2g}{V}t}} = V\frac{e^{\frac{g}{V}t}-e^{-\frac{g}{V}t}}{e^{\frac{g}{V}t}+e^{-\frac{g}{V}t}} \qquad ...(3)$$

$$= V\tanh\left(\frac{gt}{V}\right)$$

यह समीकरण कण का समय t के पदों में वेग देता है। इससे यह भी स्पष्ट है कि $v \to V$ जब $t \to \infty$.

पुनः समी. (3) से,

$$\frac{dx}{dt} = V\tanh\left(\frac{gt}{V}\right)$$

अतः समाकलन करने पर,

$$x = \frac{V^2}{g}\log\cosh\left(\frac{gt}{V}\right) + C_1 \qquad ...(4)$$

[जहाँ C_1 समाकलन अचर है।]

प्रारम्भिक प्रतिबन्धों से, $x = 0$ जब $t = 0, \therefore C_1 = 0$.

अतः समी. (4) से,

$$x = \frac{V^2}{g}\log\cosh\left(\frac{gt}{V}\right) \qquad ...(5)$$

यह समीकरण कण का समय t के पदों में विस्थापन देता है। पुनः समीकरण (A) को निम्न रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है:

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{g}{V^2}(V^2 - v^2)$$

अतः समाकलन करने पर,

$$\log(V^2 - v^2) = -\frac{2g}{V^2}x + C_2 \qquad ...(6)$$

प्रारम्भिक प्रतिबन्धों से, $v = 0$ जब $x = 0$,

$$\therefore \quad C_2 = \log V^2.$$

अतः समी. (6) से,

$$\log\frac{V^2 - v^2}{V^2} = -\frac{2g}{V^2}x \qquad ...(7)$$

यह समीकरण कण का दूरी x पर वेग देता है।

नोट— x तथा v के मध्य सम्बन्ध समी. (7), सीधे समी. (3) तथा (5) के बीच t के विलोपन से भी प्राप्त किया जा सकता है।

प्रमेय 4. एक कण उस माध्य में u वेग से क्षैतिज से α कोण पर फेंका जाता है जिसका प्रतिरोध वेग के अनुक्रमानुपाती है। प्रक्षेप पथ का समीकरण ज्ञात कीजिए।

अथवा (बिलासपुर 2004,12)

कोई कण गुरुत्वाकर्षण के अन्तर्गत ऐसे माध्यम में प्रक्षेपित किया जाता है जिसमें प्रतिरोध, वेग के समानुपाती है। सिद्ध कीजिए कि इसका त्वरण हमेशा एक दत्त दिशा $\left(\frac{g+ku\sin\alpha}{ku\cos\alpha}\right)$ में ही क्रियाशील रहता है। यह भी सिद्ध कीजिए कि त्वरण का परिमाण बिना सीमा के शून्य की ओर अग्रसर होता है, जहाँ उसका प्रारंभिक वेग u क्षैतिज से α कोण बनाता है। (रायपुर 2008)

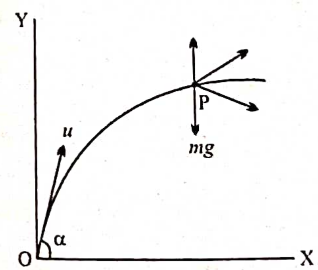
प्रमाण (Proof)— माना कि X- अक्ष एवं Y-अक्ष क्रमशः क्षैतिज एवं उदग्र हैं तथा मूलबिन्दु प्रक्षेप बिन्दु पर है। तब गति के समीकरण होंगे :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt} \qquad ...(1)$$

तथा

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - k\frac{dy}{dt} \qquad ...(2)$$

अब समी. (1) से, $\frac{d\dot{x}}{dt} = -k\dot{x}$, $\qquad \left[\dot{x} = \frac{dx}{dt}\right]$



अतः समाकलन करने पर,

$$\log\dot{x} = -kt + C_1 \qquad ...(3)$$

[जहाँ C_1 समाकलन अचर है।]

प्रारम्भिक प्रतिबन्धों से, $\dot{x} = u\cos\alpha$ जब $t = 0$.

$$\therefore \quad C_1 = \log(u\cos\alpha)$$

अतः समी. (3) से, $\log\dot{x} = -kt + \log(u\cos\alpha)$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = u\cos\alpha . e^{-kt} \qquad ...(4)$$

पुनः समी. (2) से,

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = -g - k\dot{y}, \qquad \left[\dot{y} = \frac{dy}{dt}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\dot{y}}{dt} + k\dot{y} = -g$$

यह एक रैखिक अवकल समीकरण है जिसका I.F. $= e^{kt}$.

अतः इसका सम्पूर्ण हल है :

$$\dot{y}.e^{kt} = \int(-g)e^{kt}dt + C_2,$$

जहाँ C_2 समाकलन अचर है।

$$\Rightarrow \quad \dot{y}.e^{kt} = -\frac{g}{k}e^{kt} + C_2$$

$$\Rightarrow \quad k\dot{y} + g = C_3e^{-kt}, \text{ जहाँ } C_3 = kC_2.$$

प्रारम्भिक प्रतिबन्धों से, $\dot{y} = u\sin\alpha$ जब $t = 0$,

$$\therefore \quad C_3 = ku\sin\alpha + g.$$

$$\therefore \quad k\dot{y} + g = (ku\sin\alpha + g)e^{-kt} \qquad ...(5)$$

अब समी. (4) का समाकलन करने पर,

$$x = -\frac{u\cos\alpha}{k}.e^{-kt} + C_4,$$

जहाँ C_4 समाकलन अचर है।

प्रारम्भिक प्रतिबन्धों से, $x = 0$ जब $t = 0$,

$$\therefore \quad C_4 = \frac{u\cos\alpha}{k}$$

$$\therefore \quad x = \frac{u\cos\alpha}{k}(1 - e^{-kt}) \qquad ...(6)$$

इसी प्रकार समी. (5) का समाकलन करने तथा प्रारम्भिक प्रतिबन्धों का उपयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$ky + gt = \frac{ku\sin\alpha + g}{k}(1 - e^{-kt}) \qquad ...(7)$$

समी. (6) तथा (7) से t विलोपित करने पर हम पाते हैं कि

$$y = \frac{g}{k^2}\log\left(1 - \frac{kx}{u\cos\alpha}\right) + \frac{x}{u\cos\alpha}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{k}\right) \qquad ...(8)$$

यह गति के पथ का समीकरण है तथा समी. (4) एवं (5) समय t पर कण का क्रमशः क्षैतिज एवं उदग्र वेग देता है।

त्वरण की दिशा—अक्षों की दिशा में त्वरण $\ddot{x}$ तथा $\ddot{y}$ हो, तो समी. (4) और (5) से क्रमशः

$$\left.\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{d\dot{y}}{dt} = -(ku\sin\alpha + g)e^{-kt} \\ \text{तथा} \quad \ddot{x} &= \frac{d\dot{x}}{dt} = -u\cos\alpha \cdot ke^{-kt} \end{aligned}\right\}$$

अतः त्वरण की दिशा

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{ku\sin\alpha + g}{\cos\alpha}\right). \quad \textbf{उत्तर}$$

$\therefore$ त्वरण का परिमाण

$$= \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$$

$$= e^{-kt}\sqrt{k^2u^2\cos^2\alpha + (ku\sin\alpha + g)^2} \to 0. \quad \textbf{उत्तर}$$

महत्तम ऊँचाई— कण उस समय महत्तम ऊँचाई प्राप्त करेगा जब $\dot{y} = 0$ अर्थात् जब

$$e^{-kt} = \frac{g}{ku\sin\alpha + g}, \qquad \text{[समी.(5) से]}$$

अर्थात्
$$t = \frac{1}{k}\log\left(1 + \frac{ku\sin\alpha}{g}\right) \qquad ...(9)$$

तथा वह ऊँचाई
$$y = \frac{u\sin\alpha}{k} - \frac{g}{k^2}\log\left(1 + \frac{ku\sin\alpha}{g}\right)$$

[समी. (7) एवं (8) से]

समी. (6) तथा (7) से यह भी स्पष्ट है कि जब $t \to \infty$, तब

$$x \to \frac{u\cos\alpha}{k} \text{ तथा } y \to -\infty.$$

अतः प्रक्षेप बिन्दु से क्षैतिज दूरी $\dfrac{u\cos\alpha}{k}$ पर पथ का एक उदग्र अनन्तस्पर्शी होगा।

पुनः समी. (4) तथा (5) से, जब $t \to \infty$, तब

$$\dot{x} \to 0 \text{ तथा } \dot{y} \to -\frac{g}{k}$$

अर्थात् कण ठीक उसी समय अन्त्य वेग प्राप्त करेगा। **उत्तर**

समाकलित नहीं किया जा सकता है।

प्रमेय 7. एक मणिका (bead) एक चिकने तार पर एक उदग्र तल में एक प्रतिरोध $\{= k\,(\text{वेग})^2\}$ के अधीन गति में है गति ज्ञात कीजिए। (रायपुर 2009

प्रमाण (Proof)— माना कि मणिका जब s दूरी तय कर लेती है तो वेग v हो जाता है तथा उस बिन्दु पर स्पर्श रेखा क्षैतिज के साथ ψ कोण बनाती है। तब, गति के समीकरण होंगे :

$$v\frac{dv}{ds} = g\sin\psi - kv^2 \qquad ...(1)$$

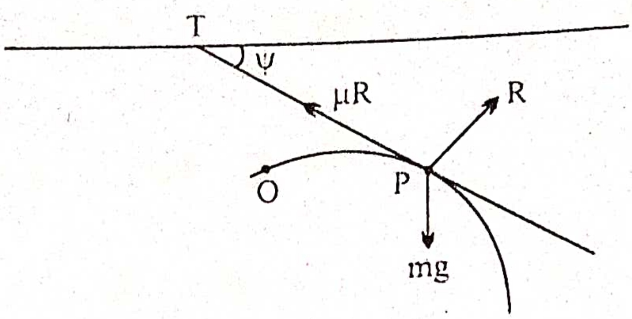
तथा
$$\frac{v^2}{\rho} = g\cos\psi - R \qquad ...(2)$$

माना कि वक्र का समीकरण है :

$$s = f(\psi) \qquad ...(3)$$

अब समी. (1) से,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{dv^2}{d\psi}\cdot\frac{d\psi}{ds} = g\sin\psi - kv^2$$



चित्र

$$\Rightarrow \qquad \frac{dv^2}{d\psi} = 2f'(\psi)[g\sin\psi - kv^2],$$

[समी. (3) से]

$$\Rightarrow \quad \frac{dv^2}{d\psi} + 2f'(\psi).kv^2 = 2g\sin\psi . f'(\psi) \qquad ...(4)$$

जो कि v^2 में एक रैखिक अवकल समीकरण है।

समी. (4) से विभिन्न वक्रों के लिए कण के गति का निर्धारण किया जा सकता है।

विशिष्ट स्थिति— माना कि वक्र एक वृत है जिसका समीकरण है :

$$s = a\psi$$

अब समी. (4) से,

$$\frac{dv^2}{d\psi} + 2kav^2 = 2ag\sin\psi$$

अतः इसका पूर्ण हल है :

$$v^2.e^{2ka\psi} = 2ag\int \sin\psi . e^{2ka\psi}\, d\psi + C,$$

[जहाँ C समाकलन अचर है।]

$$= \frac{2ag}{1+4a^2k^2} e^{2ka\psi}(2ak\sin\psi - \cos\psi) + C$$

$$\therefore \quad v^2 = \frac{2ag}{1+4a^2k^2}(2ak\sin\psi - \cos\psi) + Ce^{-2ak\psi}$$

यह कण का ψ के पदों में वेग देता है।

प्रमेय 8. एक कण गुरुत्व के अंतर्गत

प्रारम्भिक स्थिति में जब $t=0, \frac{dx}{dt}=u\cos\alpha;$

$$c_1=\log(u\cos\alpha)$$

$\therefore$ अतः समी. (3) से,

$$\frac{dx}{dt}=u\cos\alpha.e^{-kt} \qquad ...(4)$$

इसी प्रकार समी. (2) से समाकलन करने तथा प्रारम्भिक स्थिति से,

$$g+k\frac{dy}{dt}=(g+ku\sin\alpha)e^{-kt} \qquad ...(5)$$

इस प्रकार समी. (4) तथा (5) t समय बाद वेग के क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर घटक देते हैं।

समी. (4) का समाकलन करने तथा प्रारम्भिक स्थिति का उपयोग करने पर,

$$x=\frac{u\cos\alpha}{k}(1-e^{-kt}) \qquad ...(6)$$

इसी प्रकार समी. (5) से,

$$gt+ky=\frac{g+ku\sin\alpha}{k}(1-e^{-kt}) \qquad ...(7)$$

समी. (6) तथा (7) से कण द्वारा t समय में चली दूरी के क्षैतिज व उदग्र घटक प्राप्त होते हैं, अतएव ये समीकरण प्रक्षेप पथ की प्राचलिक समीकरण हैं।

निदर्शी उदाहरण (Illustrative Examples)

उदाहरण 1. द्रव्यमान m के एक कण को गुरुत्वाकर्षण के अधीन उदग्रतः फेंका जाता है, हवा का प्रतिरोध वेग का mk गुना है। दर्शाइये कि कण द्वारा प्राप्त महत्तम ऊँचाई है :

$$\frac{V^2}{g}[\lambda-\log(1+\lambda)],$$

जहाँ V कण का अन्त्य वेग (terminal velocity) है तथा λV इसका प्रारम्भिक वेग है।

(बिलासपुर 2011; रायपुर 04, 07, 13)

हल : माना कि समय t पर ऊपर की ओर वेग V है। तब गति का समीकरण होगा :

$$m\frac{dv}{dt}=-mg-mkv$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dv}{dt}=-g-kv$$

$$\Rightarrow \qquad v\frac{dv}{dx}=-\frac{g}{V}(v+V),$$

जहाँ अन्त्य वेग $\frac{g}{k}=V.$

अतः समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$V\log(v+V)-v=\frac{g}{V}x+C,$$

[जहाँ C समाकलन अचर है।]

प्रारम्भिक प्रतिबन्धों से, $v=\lambda V$ जब $x=0,$

$$\therefore \qquad C=V\log(\lambda V+V)-\lambda V.$$

$$\therefore \quad V\log(v+V)-v=\frac{g}{V}x+V\log\{V(1+\lambda)\}-V\lambda.$$

जब $v=0,$ तब हम पाते हैं कि

$$V\log V=\frac{g}{V}x+V\log\{V(1+\lambda)\}-V\lambda$$

$$\Rightarrow \qquad x=\frac{V^2}{g}[\lambda-\log(1+\lambda)].$$

प्रमाणित।

उदाहरण 2. द्रव्यमान m का एक कण गुरुत्वाकर्षण के अधीन एक माध्यम में गिरता है जिसका प्रतिरोध वेग का μ गुना है। यदि कण विराम से छोड़ा जाता है, तो दर्शाइये कि t समय में गिरी गई दूरी $g\frac{m^2}{\mu^2}\left\{e^{-\frac{\mu t}{m}}-1+\frac{\mu t}{m}\right\}$ है।

(बिलासपुर 2011)

हल : यहाँ गति का समीकरण है :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-\mu\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=g-\frac{\mu}{m}\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)+\frac{\mu}{m}\frac{dx}{dt}=g$$

यह एक रैखिक अवकल समीकरण है जिसका

$$\text{I.F.}=e^{\int\frac{\mu}{m}dt}=e^{\frac{\mu t}{m}}$$

अतः इसका हल है :

$$\frac{dx}{dt}.e^{\frac{\mu t}{m}} = g\int e^{\frac{\mu t}{m}}dt + C,$$

[जहाँ C समाकलन अचर है।]

$$= \frac{mg}{\mu}e^{\frac{\mu t}{m}} + C$$

प्रारम्भिक स्थिति में, $\frac{dx}{dt} = 0$, जब $t = 0$, $\therefore\ C = -\frac{mg}{\mu^2}$.

$$\therefore \qquad \frac{dx}{dt}.e^{\frac{\mu t}{m}} = \frac{mg}{\mu}\left(e^{\frac{\mu t}{m}} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \qquad dx = \frac{mg}{\mu}[1 - e^{-\frac{\mu t}{m}}]dt$$

अब समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$x = \frac{mg}{\mu}\left[t + \frac{m}{\mu}e^{-\frac{\mu t}{m}}\right] + C_1,$$

[जहाँ C_1 समाकलन अचर है।]

प्रारम्भिक स्थिति में $x = 0$, जब $t = 0$, $\therefore\ C_1 = -\frac{m^2 g}{\mu^2}$.

अतः $$x = g.\frac{m^2}{\mu^2}\left[e^{-\frac{\mu t}{m}} - 1 + \frac{\mu t}{m}\right].$$

प्रमाणित।

उदाहरण 3. एक कण को V वेग से एक चिकने क्षैतिज समतल में एक माध्यम में फेंका जाता है जिसका प्रति इकाई मात्रा प्रतिरोध वेग के घन का μ गुणा है। दर्शाइये कि t समय में इसके द्वारा तय की गयी दूरी $\frac{1}{\mu V}[\sqrt{1 + 2\mu V^2 t} - 1]$ है।

तथा तब इसका वेग $\frac{V}{\sqrt{\{1 + 2\mu V^2 t\}}}$ है।

(बिलासपुर 2006, 10, 11; रायपुर 06, 12)

हल : यहाँ गति का समीकरण है :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu\left(\frac{dx}{dt}\right)^3$$

अर्थात् $$\frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\mu$$

अतः समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = 2\mu t + C,$$

[जहाँ C समाकलन अचर है।]

प्रारम्भिक प्रतिबन्ध से, $\frac{dx}{dt} = V$, जब $t = 0$, $\therefore C = \frac{1}{V^2}$.

अतः $$\frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = 2\mu t + \frac{1}{V^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{V^2}{1 + 2\mu V^2 t}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{V}{\sqrt{\{1 + 2\mu V^2 t\}}}$$

यही अभीष्ट वेग है। प्रमाणित।

पुनः इसका समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$x = \frac{1}{\mu V}\sqrt{\{1 + 2\mu V^2 t\}} + C_1,$$

[जहाँ C_1 समाकलन अचर है।]

प्रारम्भिक प्रतिबन्ध से $x = 0$, जब $t = 0$, $\therefore C_1 = -\frac{1}{\mu V}$.

अतः $$x = \frac{1}{\mu V}[\sqrt{\{1 + 2\mu V^2 t\}} - 1].$$

यह अभीष्ट दूरी देता है। प्रमाणित।

उदाहरण 4. (a) एक कण उस प्रतिरोधी माध्यम में फेंका जाता है जिसका प्रतिरोध (वेग)^n के समानुपाती है तथा यह t समय में s दूरी तय करने के बाद विराम में आता है। s एवं t का मान ज्ञात कीजिए तथा दर्शाइये कि s परिमित है यदि $n <$ 2, लेकिन अपरिमित है यदि $n \geq 2$ जबकि t परिमित है यदि $n < 1$, लेकिन अपरिमित है यदि $n \geq 1$.

यदि प्रतिरोध k (वेग) तथा प्रारम्भिक वेग V हो, तो दर्शाइये कि $v = Ve^{-kt}$ तथा $s = \frac{V}{k}(1 - e^{-kt})$.

(रायपुर 2010)

हल : यहाँ गति का समीकरण है :

$$v\frac{dv}{ds} = -\mu v^n$$

$$\mu ds = -\frac{dv}{v^{n-1}} \qquad ...(1)$$

⇒

अब समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\mu s = \frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{v^{n-2}} + C,$$

[जहाँ C समाकलन अचर है।]

प्रारम्भिक स्थिति में, जब $s = 0,\ v = V$.

$$\therefore \quad C = -\frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{V^{n-2}}.$$

$$\text{अतः} \quad \mu s = \frac{1}{n-2}\left[\frac{1}{v^{n-2}} - \frac{1}{V^{n-2}}\right] \qquad ...(2)\ \text{उत्तर}$$

यदि $n > 2$ तथा $v = 0$, तब $s = \infty$.

यदि $n = 2$, तब समी. (1) से,

$$\mu s = \log\frac{V}{v}.$$

इस प्रकार जब $n = 2$ तथा $v = 0$, तब $s = \infty$.

यदि $n < 2$, माना $n = 2 - \lambda$ तथा $v = 0$, तब

$$\mu s = \frac{V^{\lambda}}{\lambda}, \qquad \text{[समी. (2) से] प्रमाणित।}$$

पुनः गति के समीकरण को निम्न रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है:

$$\frac{dv}{dt} = -\mu v^n$$

$$\Rightarrow \quad \mu dt = -\frac{dv}{v^n} \qquad ...(3)$$

समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\mu t = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{v^{n-1}} + C_1,$$

[जहाँ C_1 समाकलन अचर है।]

प्रारम्भिक प्रतिबन्ध से, $v = V$ जब $t = 0$.

$$\therefore \quad C_1 = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{V^{n-1}}$$

$$\therefore \quad \mu t = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{v^{n-1}} - \frac{1}{V^{n-1}}\right] \qquad ...(4)\ \text{उत्तर}$$

अब यदि $n < 1$, माना $n = 1 - m$ तथा $v = 0$, तब

$$\mu t = \frac{V^m}{m}$$

पुनः यदि $n > 1$ तथा $v = 0$, तब $t = \infty$.

यदि $n = 1$ तब समी. (3) से,

$$\mu t = \log\frac{V}{v}$$

इस प्रकार जब $n = 1$ तथा $v = 0$ तब $t = \infty$. प्रमाणित।

अंतिम भाग— यहाँ गति का समीकरण है :

$$\frac{dv}{dt} = -kv$$

$$\therefore \quad kt = -\log v + C_2,$$

[जहाँ C_2 समाकलन अचर है।]

प्रारम्भिक प्रतिबन्ध से, $v = V$ जब $t = 0$.

$$\therefore \quad C_2 = \log V.$$

$$\therefore \quad kt = \log\frac{V}{v}$$

$$\Rightarrow \quad v = Ve^{-kt}. \qquad ...(5)\ \text{प्रमाणित।}$$

$$\text{पुनः} \quad v = \frac{ds}{dt} = Ve^{-kt}$$

$$\therefore \quad s = \int Ve^{-kt}dt$$

$$= -\frac{V}{k}e^{-kt} + C_3,$$

[जहाँ C_3 समाकलन अचर है।]

प्रारम्भिक स्थिति में $s = 0$ जब $t = 0$. $\therefore\ C_3 = \frac{V}{k}$.

$$\text{अतः} \quad s = \frac{V}{k}[1 - e^{-kt}]. \qquad \text{प्रमाणित।}$$

उदाहरण 4. (b) एक कण V वेग से एक चिकने क्षैतिज समतल पर ऐसे माध्यम में प्रक्षेपित किया जाता है, जिसकी प्रति इकाई संहति पर प्रतिरोध k है। तो दर्शाइये कि t समय पश्चात् कण का वेग $v = Ve^{-kt}$ है। (रायपुर 2004)

हल : उपरोक्त प्रश्न 4.(a) के "अंतिम भाग" समी. (5, तक हल करें।

उदाहरण 5. एक भारी कण को उदग्रतः ऊपर की ओर एक माध्यम में फेंका जाता है, जिसका प्रतिरोध वेग के वर्ग के समानुपाती है। इसके ऊपरी पथ के किसी दिये हुए बिन्दु पर इसकी गतिज ऊर्जा K है, जब नीचे उतरते हुए उसी बिन्दु

$$= \frac{V^2 u^2}{V^2 + u^2}$$

अत: गतिज ऊर्जा का ह्रास $= \frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}mv^2$

$$= \frac{1}{2}m\left[u^2 - \frac{V^2 u^2}{V^2 + u^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}mu^2 . \left(\frac{u^2}{V^2 + u^2}\right) \text{. उत्तर}$$

उदाहरण 8. एक भारी मणिका (bead) चक्रज के रूप में एक चिकने तार पर, जिसका अक्ष उदग्र एवं शीर्ष ऊपर की ओर है, उस माध्यम में फिसलता है जिसका प्रतिरोध $m\frac{v^2}{2c}$ है तथा प्रारम्भ बिन्दु का शीर्ष से दूरी c है। दर्शाइये कि कस्प पर उतरने का समय $\sqrt{\left\{\frac{8a(4a-c)}{gc}\right\}}$ है, जहाँ $2a$ चक्रज के अक्ष की लम्बाई है। (रायपुर 2013)

हल : चक्रज का नैज समीकरण होता है :

$$s = 4a \sin\psi \qquad ...(1)$$

यहाँ गति का समीकरण है :

$$v\frac{dv}{ds} = g\sin\psi - \frac{V^2}{2C}$$

$$= \frac{gs}{4a} - \frac{v^2}{2c}, \qquad \text{[समी. (1) से]}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv^2}{ds} + \frac{1}{C}v^2 = \frac{g}{2a}s \qquad ...(2)$$

यह एक रैखिक अवकल समीकरण है जिसका

$$\text{I.F.} = e^{\int \frac{1}{c}ds} = e^{\frac{s}{c}}$$

अत: अवकल समीकरण (2) का हल है :

$$s.e^{\frac{s}{c}} = \frac{g}{2a}\int se^{\frac{s}{c}}ds$$

$$= \frac{g}{2a}[s.ce^{\frac{s}{c}} - c^2 e^{\frac{s}{c}}] + C,$$

जहाँ C समाकलन अचर है।

प्रारम्भिक स्थिति में $s = c$ तब $v = 0$. $\therefore\ C = 0$

अत:

$$v^2.e^{\frac{s}{c}} = \frac{g}{2a}.c(s-c)e^{\frac{s}{c}}$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{gc}{2a}\right)}\sqrt{(s-c)}.$$

अब समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$t = \sqrt{\left(\frac{2a}{gc}\right)}\int_c^{4a}\frac{ds}{\sqrt{s-c}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2a}{gc}\right)}[2\sqrt{s-c}]_c^{4a}$$

$$= 2\sqrt{\left(\frac{2a}{gc}\right)}.\sqrt{4a-c}$$

$$= \sqrt{\left(8a\frac{(4a-c)}{gc}\right)}. \qquad \text{प्रमाणित।}$$

उदाहरण 9. एक भारी कण चक्रज के रूप में एक चिकने तार पर, जिसका अक्ष उदग्र एवं शीर्ष नीचे की ओर है, कस्प पर विराम से फिसलता है तथा इसके भार के अतिरिक्त इस पर एक स्पर्शरेखीय प्रतिरोध लगता है जो कि वेग के वर्ग के समानुपाती है। ऊँचाई x से गिरने के बाद वेग का निर्धारण कीजिए।

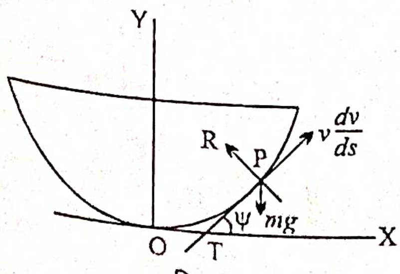
हल : चक्रज का नैज समीकरण है :

$$s = 4a\sin\psi \qquad ...(1)$$

यहाँ गति का समीकरण है :

$$v\frac{dv}{ds} = -g\sin\psi - \mu v^2$$

$$= -\left(\frac{g}{4a}\right)s - \mu v^2, \qquad \text{[समी. (1) से]}$$



चित्र

$$\Rightarrow \quad \frac{dv^2}{ds} + 2\mu v^2 = -\left(\frac{g}{2a}\right)s \qquad ...(2)$$

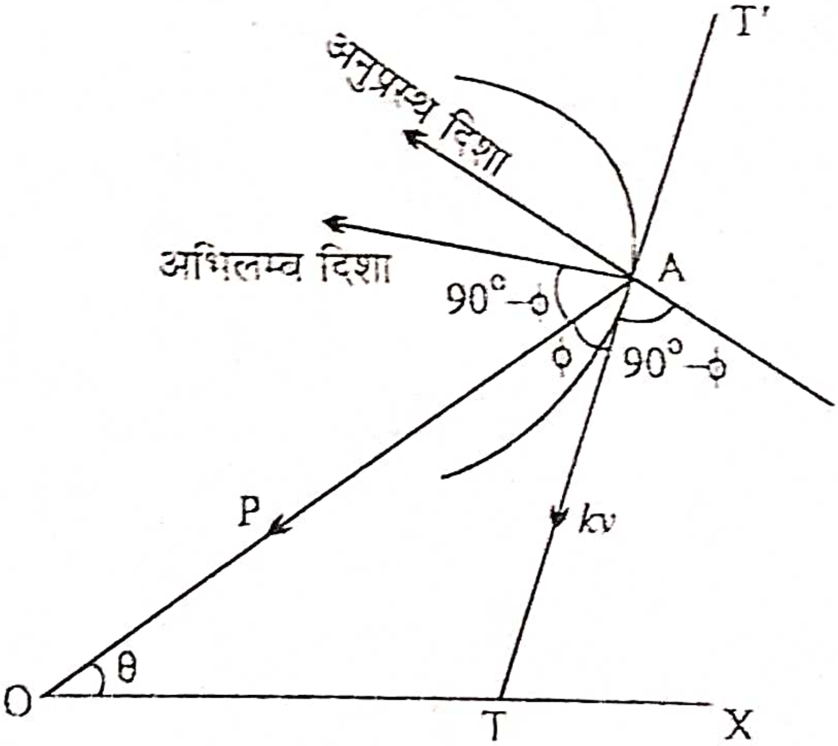
उदाहरण 16. एक कण एक केन्द्रीय त्वरण P के अन्तर्गत एक माध्यम, जिसका अवरोध k (वेग $)^2$ है, में गति करता है। दर्शाइये कि इसके पथ का समीकरण है—

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{P}{h^2u^2}e^{2ks}$$

जहाँ s चाप की लम्बाई और बल के केन्द्र के सापेक्ष प्रारम्भिक संवेग का आघूर्ण (कोणीय संवेग) h है।

(रायपुर 2005, 10)

हल : यहाँ अवरोध $= kv^2$



चित्र

माना किसी समय कण बिन्दु A पर है। तब गति की त्रिज्यीय एवं अनुप्रस्थ समीकरण निम्न हैं—

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -kv^2 \cos\phi - P \qquad \text{...(1)}$$

तथा $$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = -kv^2 \cos(90^\circ - \phi)$$

$$= -kv^2 \sin\phi \qquad \text{...(2)}$$

समी. (2) से,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(h') = -k\frac{h'}{p}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{p}{r},$$

[$\because r^2\dot{\theta} = pv = h'$ (माना) = कोणीय संवेग तथा

$p = r\sin\phi$ तथा $v = \frac{ds}{dt}$]

$$\Rightarrow \quad \frac{dh'}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = -kh'\frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dh'}{h'} = -kds$$

समाकलन करने पर,

$$\log h' = -ks + C \qquad \text{...(3)}$$

प्रारम्भिक स्थिति में जब $s = 0$, तब कोणीय संवेग $= r^2\dot{\theta} = h; \ \therefore C = \log h,$

अतः समी. (3) से,

$$\log h' = -ks + \log h$$

$$\Rightarrow \quad h' = he^{-ks}$$

$$\Rightarrow \quad r^2\dot{\theta} = he^{-ks}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{h}{r^2}e^{-ks} \qquad \text{...(4)}$$

माना $r = \frac{1}{u}$. तब,

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta}$$

$$= -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{h}{r^2}e^{-ks}, \qquad \text{[समी. (4) से]}$$

$$= -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}.hu^2.e^{-ks}$$

$$= -he^{-ks}\frac{du}{d\theta} \qquad \text{...(5)}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2r}{dt^2} = -he^{-ks}\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} + hke^{-ks}\frac{ds}{dt}\cdot\frac{du}{d\theta}$$

$$= -h^2u^2e^{-2ks}\frac{d^2u}{d\theta^2} + vhke^{-ks}\frac{du}{d\theta} \qquad \text{...(6)}$$

[समी. (4) से तथा $v = \frac{ds}{dt}$]

अब समी. (4) तथा (6) का उपयोग समी. (1) में करने पर,

$$-h^2u^2e^{-2ks}\frac{d^2u}{d\theta^2} + vhke^{-ks}\frac{du}{d\theta} - r\frac{h^2}{r^4}e^{-2ks}$$

$$= -kv^2\cos\phi - P$$

$$\Rightarrow \quad -h^2e^{-2ks}\left[u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} + u^3\right] + vhke^{-ks}\frac{du}{d\theta}$$

$$= -kv\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dr}{ds} - P$$

$$= -kv\frac{dr}{dt} - P$$

$$= vhke^{-ks}\frac{du}{d\theta} - P, \qquad \text{[समी. (5) से]}$$

$$\Rightarrow \quad -h^2u^2e^{-2ks}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = -P$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{P}{h^2u^2}e^{2ks}. \qquad \text{प्रमाणित।}$$

उदाहरण 17. एक कण एक अवरोधी माध्यम में दिये गये केन्द्रीय त्वरण P के अन्तर्गत गति करता है। कण का पथ दिया है। दर्शाइये कि अवरोध है :

$$-\frac{1}{2p^2}\frac{d}{ds}\left(p^3\frac{dr}{dp}P\right).$$

(बिलासपुर 2008; सरगुजा 12)

हल : माना किसी समय t पर कण बिन्दु A पर है जहाँ इसका वेग v है। त्वरण P, AO की दिशा में लग रहा है। यदि माध्यम का अवरोध R हो, तो गति के समीकरण होंगे—

$$v\frac{dv}{ds} = -P\cos\phi - R \qquad \text{...(1)}$$

तथा $$\frac{v^2}{\rho} = P\cos(90^\circ - \phi) = P\sin\phi$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{\mu}{r^{n-1}}\right) - \frac{\mu}{r^n}.\cos\alpha,$$

[समी. (4) से]

$$= -\frac{\mu}{2}.\frac{-(n-1)}{r^n}.\frac{dr}{ds} - \frac{\mu}{r^n}\cos\alpha$$

$$= \frac{\mu(n-1)}{2r^n}\cos\alpha - \frac{\mu}{r^n}\cos\alpha,$$

$$\left[\because \frac{dr}{ds} = \cos\phi = \cos\alpha\right]$$

$$= \frac{n-3}{2}.\frac{\mu\cos\alpha}{r^n}.$$ प्रमाणित।

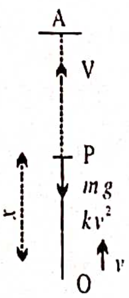
उदाहरण 19. कोई कण ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर v से प्रक्षेपित किया जाता है, जहाँ माध्यम में हवा का प्रतिरोधी बल kv^2 है, जबकि v' कण का उस स्थिति में वेग है। यदि कण प्रक्षेप बिन्दु पर पुनः v' वेग से वापस लौटता है तब सिद्ध कीजिये कि :

$$\frac{1}{v'^2} = \frac{1}{v^2} + \frac{k}{g}.$$

(बस्तर 2012; रायपुर 11; सरगुजा 10; बिलासपुर 09)

हल : माना कण का प्रक्षेप बिन्दु O है तथा t समय बाद p पर उसका वेग v है, जहाँ $OP = x$. तब गति का समीकरण होगा :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g - kv^2$$



$$\Rightarrow \quad v\frac{dv}{dx} = -g - kv^2$$

$$\Rightarrow \quad -dx = \frac{v}{g + Kv^2}dv$$

समाकलन करने पर,

$$C_1 - x = \frac{1}{2k}\log(g + kv^2)$$

पुनः जब $x = 0, v = V$.

$$\therefore \quad C_1 = \frac{1}{2k}\log(g + kV^2)$$

C_1 के इस मान को उपर्युक्त समीकरण में रखने पर तथा सरल करने पर,

$$x = \frac{1}{2k}\log\left(\frac{g + kV^2}{g + kv^2}\right) \quad ...(1)$$

माना कि कण का वेग A पर जाकर शून्य हो जाता है जहाँ $OA = h$

तब समी. (1) से,

$$h = \frac{1}{2k}\log\left(\frac{g + kV^2}{g}\right) \quad ...(2)$$

अब कण A पर पहुँचकर पुनः वापस आयेगा। अतः इस स्थिति में गति का समीकरण होगा :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g - kv^2$$

$$v\frac{dv}{dy} = g - kv^2$$

$$\Rightarrow \quad dy = \frac{vdv}{v - kv^2}$$

इसका समाकलन करने पर,

$$y = C_2 - \frac{1}{2k}\int\frac{-2kvsv}{g - kv^2}$$

$$= C_2 - \frac{1}{2k}\log(g - kv^2)$$

पुनः जब $y = 0, v = 0$

$$\therefore \quad C_2 = \frac{1}{2k}\log g$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2k}\log\left(\frac{g}{g - kv^2}\right) \quad ...(3)$$

जब कण पुनः O पर पहुँचता है, तब $y = h, v = V'$ (दिया गया है।)

अतः समी. (3) से,

$$h = \frac{1}{2k}\log\left(\frac{g}{g - kv'^2}\right) \quad ...(4)$$

अब समी. (2) तथा (4) से,

$$\frac{1}{2k}\log\left(\frac{g + kV^2}{g}\right) = \frac{1}{2k}\log\left(\frac{g}{g - kv'^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{g + kV^2}{g} = \frac{g}{g - kv'^2}$$

$$\Rightarrow \quad g^2 - kgv'^2 + kgV^2 - k^2V^2v'^2 = g^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{v'^2} = \frac{1}{V^2} + \frac{k}{g}.$$ प्रमाणित।

उदाहरण 20. यदि कोई कण क्षैतिज से α कोण बनाते हुए ऐसे माध्यम से किसी वेग u से प्रक्षेपित किया जाये जिसमें प्रतिरोध उसके वेग के समानुपाती हो, तो सिद्ध कीजिए कि इसमें पथ का समीकरण उचित अक्षों के संदर्भ में $y+ax=b\log x$ के रूप में लिखा जा सकता है।

(बिलासपुर 2005, रायपुर 11)

हल : कण के पथ का समीकरण होगा :

$$y=\frac{g}{K^2}\log\left(1-\frac{Kx}{u\cos\alpha}\right)+\frac{x}{Ku\cos\alpha}(g+Ku\sin\alpha) \quad ...(1)$$

इसमें $1-\dfrac{Kx}{u\cos\alpha}=X$ रखने पर,

$$y=\frac{g\log}{K^2}X+\frac{1-X}{K^2}(g+ku\sin\alpha)$$

$$y-\frac{g+ku\sin\alpha}{K^2}=\frac{g}{K^2}\log X-\frac{g+Ku\sin\alpha}{K^2}X$$

अब समी. (2) में, ...(2)

$$y-\frac{g+ku\sin\alpha}{K^2}=Y \text{ तथा } \frac{g+ku\sin\alpha}{K^2}=a$$

रखने पर, $Y=\dfrac{g}{k^2}\log X-aX$

$$y+ax=b\log x, \text{ जहाँ } b=\frac{g}{k^2}$$

इसे मानक रूप में लिखने पर पथ का समीकरण होगा :

$$y+ax=b\log x.$$

प्रमाणित।

उदाहरण 21. एक कण ऊपर की ओर वेग V से उस माध्यम में फेंका जाता है जिनका प्रतिरोध वेग U के वर्ग के समानुपाती है। दर्शाइये कि यह प्रक्षेप बिन्दु पर वेग $V_1=UV/\sqrt{U^2+V^2}$ से वापस आयेगा।

(बिलासपुर 2011)

हल : सर्वप्रथम हम ऊपर की ओर की गति पर विचार करेंगे जिसमें प्रक्षेप बिन्दु मूल बिन्दु है।

यहाँ गति का समीकरण है :

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{g}{V^2}\left(V^2+v^2\right) \quad ...(1)$$

जहाँ V अन्त्य वेग है

दिये गये सीमाओं के अधीन समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$-\int_U^0\frac{Vdv}{V^2+v^2}=\int_0^{t_1}\frac{g}{V}dt$$

$$\Rightarrow \quad t_1=\frac{V}{g}\tan^{-1}\frac{U}{V} \quad ...(2)$$

जहाँ t_1 ऊपर की ओर जाने में लगा समय है । पुनः (1) को निम्न रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है :

$$v\frac{dv}{dx}=-\frac{g}{V^2}(V^2+v^2) \quad ...(3)$$

v की सीमाओं V तथा 0 एवं x की सीमाओं 0 तथा h के अधीन समी. (3) का समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$h=\frac{V^2}{2g}\log\left(\frac{g+KU^2}{g}\right) \quad ...(4)$$

अब हम नीचे की ओर की गति पर विचार करते हैं तथा $v=0$ पर मूल विन्दु लेते हुए नीचे की ओर दूरी नापते हैं । तब गति का समीकरण होगा :

$$v\frac{dv}{dy}=\frac{g}{V^2}(V^2-v^2) \quad ...(5)$$

दिये हुए सीमाओं के अधीन समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\int_0^{V_1}\frac{2V}{V^2-v^2}dv=\int_0^h\frac{2g}{V^2}dy$$

जहाँ V_1 कण द्वारा प्रक्षेप विन्दु पर लौटकर आने पर प्राप्त वेग है।

$$\Rightarrow \quad \log\left\{\frac{V^2-V_1^2}{V^2}\right\}=-\frac{2g}{V^2}h$$

$$=-\log\left\{\frac{g+kU^2}{g}\right\}, \text{ [समी. (1) से]}$$

अत: $V_1=\dfrac{UV}{\sqrt{U^2+V^2}}, V^2=g/k$ के लिये

प्रमाणित।

उदाहरण 22. एक कण V वेग से एक चिकने क्षैतिज समतल पर ऐसे माध्यम में प्रक्षेपित किया जाता है, जिसकी प्रति इकाई संहति पर प्रतिरोध k(वेग) है। दर्शाइये कि t समय पश्चात् कण का वेग v और इस समय पर चली गई दूरी s निम्नांकित से दी जाती है :

$$v=Ve^{-kt} \text{ तथा } s=\frac{V}{k}(1-e^{-kt}).$$

(रायपुर 2010, 11)

हल : चूँकि कण एक चिकने क्षैतिज समतल में प्रक्षेपित किया जाता है, अतएव प्रश्नानुसार गति का समीकरण होगा :

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mkv$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -kv$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -kdt$$

समाकलन करने पर $\log v = -kt + C$

प्रारम्भिक स्थिति में, $v = V$ जब $t = 0$

$\therefore \quad \log V = 0 + C \Rightarrow C = \log V$

$$\therefore \quad \log v = -kt + \log V$$

$$\Rightarrow \quad v = Ve^{-kt} \qquad ...(1)$$

प्रमाणित।

पुनः समी. (1) से, $\dfrac{ds}{dt} = Ve^{-kt}$

$$ds = Ve^{-kt}\,dt$$

समाकलन करने पर, $s = -\dfrac{V}{k}e^{-kt} + C_1$ प्रारम्भिक स्थिति में, $s = 0$ जब $t = 0$

$$\therefore \quad 0 = -\frac{V}{k} + C_1$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \frac{V}{k}$$

$$\therefore \quad s = \frac{V}{k}e^{-kt} + \frac{V}{k}$$

$$\Rightarrow \quad s = \frac{V}{k}(1 - e^{-kt}).$$ **प्रमाणित।**

उदाहरण 23. किसी ऊर्ध्वाधर में एक चिकने तार पर एक छल्ला, एक अवरोध जो वेग के वर्ग के अनुक्रमानुपाती है, के अन्तर्गत गति करता है। गति ज्ञात कीजिए।

(रायपुर 2009; सरगुजा 11)

हल : माना किसी क्षण द्रव्यमान m का छल्ला बिन्दु P पर है। माना बिन्दु P पर स्पर्श रेखा X– अक्ष के साथ कोण ψ बनाती है। माना बिन्दु P पर छल्ले का वेग v है।

अतः छल्ले पर अवरोधी बल $= kmv^2$

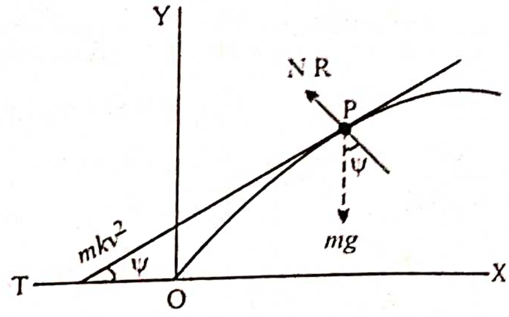
अब छल्ले पर बिन्दु P पर निम्नलिखित बल कार्य कर रहे हैं—

(i) छल्ले का भार mg ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर

(ii) तार की अभिलम्ब प्रतिक्रिया R, PN के अनुगत रखा

(iii) गति की दिशा के विपरीत दिशा में स्पर्श रेखा के अनुगत

अवरोधी बल $= mkv^2$



चित्र

विन्दु P पर स्पर्शी व अभिलम्ब के अनुगत गति की समीकरणें निम्नलिखित हैं—

$$mv\frac{dv}{ds} = -mg\sin\psi - mkv^2$$

$$\Rightarrow \quad v\frac{dv}{ds} = -g\sin\psi - kv^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds} + kv^2 = -g\sin\psi \qquad ...(1)$$

$$\text{तथा} \quad m\frac{v^2}{\rho} = mg\cos\psi - R \qquad ...(2)$$

अब समी. (1) से,

$$\frac{dv^2}{ds} + 2kv^2 = -2g\sin\psi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv^2}{d\psi}\cdot\frac{d\psi}{ds} + 2kv^2 = -2g\sin\psi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv^2}{d\psi} + 2k\rho v^2 = -2g\rho\sin\psi, \left[\because \rho = \frac{ds}{d\psi}\right] \qquad ...(3)$$

उत्तर

यही अभीष्ट गति का समीकरण है।

अध्याय 15

विचल द्रव्यमान के कणों की गति

[MOTION OF PARTICLES OF VARYING MASS]

§ 15·1. उस पिण्ड की गति का समीकरण प्राप्त करना जिसका द्रव्यमान समय के साथ गति के दौरान परिवर्तित होता है

जब m अचर हो तभी समीकरण $P = mf$ सत्य होता है। अत्यधिक मौलिक रूप में न्यूटन का दूसरा नियम है :

$$P = \frac{d}{dt}(mv) \qquad ...(1)$$

माना कि एक कण δt समय में अपने द्रव्यमान में δm वृद्धि कर लेता है तथा यह द्रव्यमान δm वेग u से घूमता है।

तब δt समय में कण के संवेग (momentum) में वृद्धि

$$= m.\delta v + \delta m.(v + \delta v - u)$$

तथा इस समय में बल का आवेग (impulse) $= P\delta t$.

इनको बराबर करने तथा सीमा (limit) लेने पर हम पाते हैं कि

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} - u\frac{dm}{dt} = P$$

अर्थात् $\quad \dfrac{d}{dt}(mv) = P + u\dfrac{dm}{dt}$

जो कि $u = 0$ होने की स्थिति में समी. (1) के सदृश है।

निदर्शी उदाहरण (Illustrative Examples)

उदाहरण 1. वर्षा की एक गोलाकार बूँद मुक्त रूप से गिरता हुआ, प्रत्येक क्षण अपने आयतन में उस क्षण अपने सतह के क्षेत्रफल का λ गुना वृद्धि प्राप्त करता है। t समय के बाद वेग ज्ञात कीजिए तथा उतनी ही समय में जिस दूरी से गिरता है वह दूरी ज्ञात कीजिए।

(रायपुर 2008, 12; सरगुजा 10; बिलासपुर 12)

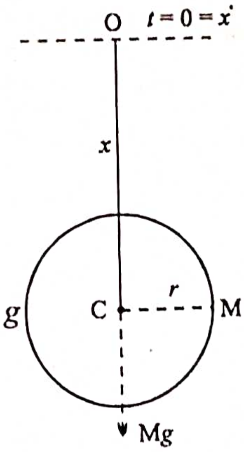
हल : जब t समय में वर्षा की बूँद x दूरी गिरता है, माना कि इसका त्रिज्या r तथा इसका द्रव्यमान M है। तब, संवेग $M\dfrac{dx}{dt}$ है। संवेग परिवर्तन की दर इसके भार के बराबर होगी।

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\left(M\frac{dx}{dt}\right) = Mg \qquad ...(1)$$

अब $\quad M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, \quad$ [ρ द्रव का घनत्व है।]

$$\therefore \quad \frac{dM}{dt} = 4\pi r^2 \rho \frac{dr}{dt} = \lambda.4\pi r^2.\rho, \quad \text{[प्रश्नानुसार]}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \lambda$$



तथा $\quad r = a + \lambda t$

जहाँ a प्रारम्भिक त्रिज्या है।

अत: समी. (1) से,

$$\frac{d}{dt}\left[(a+\lambda t)^3 \frac{dx}{dt}\right] = (a+\lambda t)^3 g$$

समाकलन करने पर,

$$(a+\lambda t)^3 \frac{dx}{dt} = \frac{(a+\lambda t)^4}{4\lambda} g + C,$$

जहाँ C समाकलन अचर है।

प्रारम्भिक स्थिति में $\dfrac{dx}{dt} = 0$ जब $t = 0$. अत: $C = -\dfrac{ga^4}{4\lambda}$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \frac{g}{4\lambda}\left[a + \lambda t - \frac{a^4}{(a+\lambda t)^3}\right]. \qquad \text{उत्तर}$$

पुन: समाकलन करने तथा प्रारम्भिक प्रतिबन्धों का उपयोग करने पर,

$$x = \frac{g}{4\lambda^2}\left[\frac{(a+\lambda t)^2}{2} + \frac{a^4}{2(a+\lambda t)^2}\right] - \frac{g}{4\lambda^2}a^2$$

$$= \frac{g}{8\lambda^2}\left[(a+\lambda t)^2 - 2a^2 + \frac{a^4}{(a+\lambda t)^2}\right]$$

$$= \frac{g}{8\lambda^2}\left[a+\lambda t - \frac{a^2}{a+\lambda t}\right]^2$$

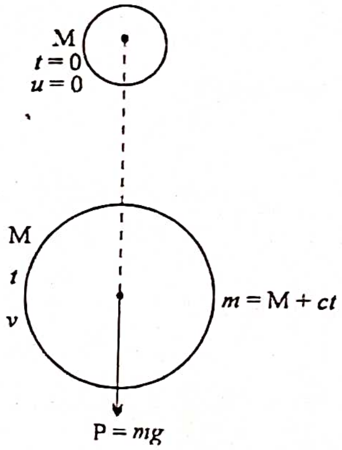
$$= \frac{gt^2}{8}\left[\frac{2a+\lambda t}{a+\lambda t}\right]^2.$$ उत्तर

उदाहरण 2. तरल की एक गोलाकार बूँद वाष्प में गिरते हुए संघनन द्वारा c की अचर दर से द्रव्यमान प्राप्त करती है। दर्शाइये कि विराम से गिरते हुए t समय बाद इसका वेग है :

$$\frac{1}{2}gt\left[1+\frac{M}{M+ct}\right].$$

(रायपुर 2004, 07, 09; बिलासपुर 08, 10, 13; बस्तर 12; सरगुजा 11, 12)

हल : यहाँ $P = mg$, जहाँ m किसी समय t पर बूँद का प्रारम्भिक द्रव्यमान है।



माना M, बूँद का आदि द्रव्यमान है। तब,

$$m = M + ct \qquad ...(1)$$

समी. (1) का t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dm}{dt} = c, \qquad [\because M \text{ अचर है}]$$

चूँकि द्रव्यमान का आदि वेग शून्य है, अतएव $u = 0$.

अतः गति का समीकरण है :

$$\frac{d}{dt}(mv) = P + u\frac{dm}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\{(M+ct)v\} = (M+ct)g + 0, \quad [\text{समी. (1) से}]$$

अतः समाकलन करने पर,

$$(M+ct)v = \frac{g(M+ct)^2}{2c} + C$$

प्रारम्भिक स्थिति में जब $t=0$, तब $v=0$; $\therefore\ C = -\frac{gM^2}{2c}$

$$\therefore \quad (M+ct)v = \frac{g}{2c}(M+ct)^2 - \frac{gM^2}{2c}$$

$$\Rightarrow \qquad v = \frac{g(M+ct)}{2c} - \frac{gM^2}{2c(M+ct)}$$

$$= \frac{g}{2c}\left[\frac{(M+ct)^2 - M^2}{M+ct}\right]$$

$$= \frac{g}{2c}\left[\frac{2Mct + c^2t^2}{M+ct}\right]$$

$$= \frac{gt}{2}\left[\frac{2M+ct}{M+ct}\right]$$

$$= \frac{gt}{2}\left[1+\frac{M}{M+ct}\right].$$ प्रमाणित।

उदाहरण 3. एक ठोस बेलन के रूप में एक द्रव्यमान जिसका अनुप्रस्थ काट A है, अपने अक्ष के समान्तर घूमता है, पर एक अचर बल F लग रहा है, आयतन घनत्व ρ के अच्छे धूल के समांग बादल होकर जो उस दिशा के विपरीत घूम रहा है जिस दिशा में बेलन अचर वेग V से यदि सभी धूल जो बेलन के पास आते हैं इससे चिपक जाते हैं, तो किसी समय t में प्राप्त वेग एवं तय की गयी दूरी ज्ञात कीजिए; बेलन मूलतः विराम में रहता है तथा इसका प्रारम्भिक द्रव्यमान m है।

हल : माना कि समय t पर बेलन का द्रव्यमान m तथा वेग v हैं तब,

$$M\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} + V\frac{dm}{dt} = F \qquad ...(1)$$

पुनः
$$\frac{dM}{dt} = A\rho(v+V) \qquad ...(2)$$

अब समी. (1) का समाकलन करने पर,

$$Mv + MV = Ft + C,$$

जहाँ C समाकलन अचर है।

यहाँ जब $t=0$, $v=0$ तथा $M = m$ $\therefore C = mV$

अध्याय 16

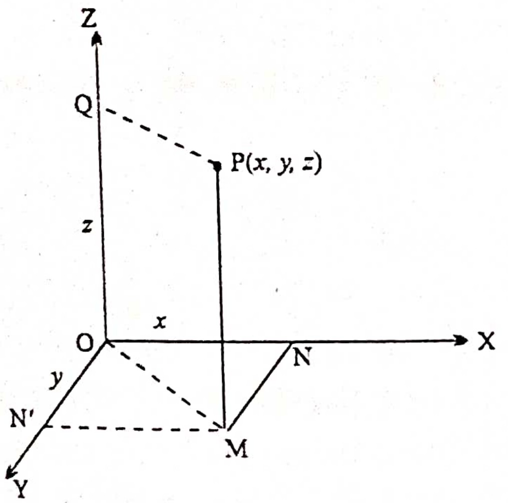
त्रिविमीय आकाश में एक कण की गति, विभिन्न नियामक निकायों के पदों में त्वरण

[MOTION OF A PARTICLE IN THREE DIMENSIONS, ACCELERATION IN TERMS OF DIFFERENT CO-ORDINATE SYSTEMS]

§ 16·1. प्रमेय : कार्तीय निर्देशांकों के पदों में किसी कण का त्वरण ज्ञात करना (To find Acceleration in Terms of Cartesian Co-ordinates)

(बिलासपुर 2009; सरगुजा 10, 11,12)

प्रमाण (Proof)—माना किसी समय t पर कोई कण त्रिविमीय आकाश में बिन्दु $P(x, y, z)$ पर है। इस स्थिति में माना कण का कार्तीय अक्षों OX, OY, OZ के अनुदिश त्वरण क्रमशः α, β, γ है।



चित्र

बिन्दु P से XOY तल पर लम्ब PM डाला। पुनः M से MN तथा MN' लम्ब क्रमशः OX तथा OY अक्षों पर डाला। P से OZ अक्ष पर लम्ब PQ डाला। तब,

$$ON = x, \ ON' = y, \text{ तथा } OQ = z.$$

अतः X-अक्ष के अनुदिश P का त्वरण,

$$\alpha = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

इसी प्रकार, Y-अक्ष के अनुदिश P का त्वरण,

$$\beta = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$$

तथा Z-अक्ष के अनुदिश P का त्वरण,

$$\gamma = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}.$$

§ 16·2. प्रमेय : गोलीय ध्रुवीय नियामकों के पदों में एक कण का त्वरण ज्ञात करना (To find the Accelera-tions of a Particle in Terms of Polar Co-ordinates)

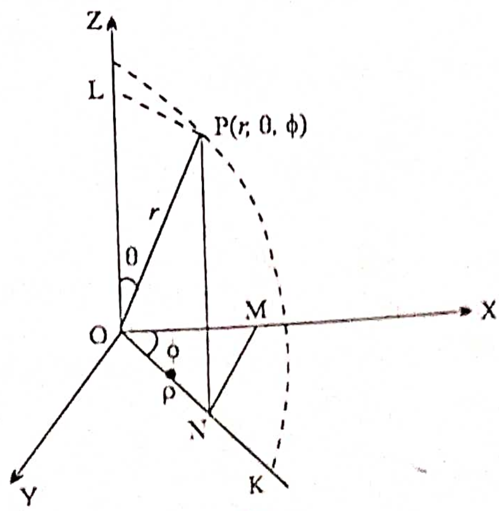
(रायपुर 2005, 09, 10, 11; बिलासपुर 08, 13)

माना कि नियत मूलबिन्दु O के सापेक्ष किसी समय t पर कण बिन्दु P पर है, जिसके नियामक (r, θ, ϕ) हैं, जहाँ

$$r = OP,$$

$$\theta = \angle ZOP,$$

तथा $\phi =$ तलों ZOP तथा ZOX के बीच का कोण।



चित्र

अब तल XOY पर P से लम्ब PN डाला तथा माना कि

$$ON = \rho$$

तब N, जो कि XOY तल में है, के ध्रुवीय नियामक (ρ, ϕ) हैं। अतः त्रिज्यीय एवं अनुप्रस्थ त्वरणों से हम पाते हैं कि

ON के अनुदिश त्वरण $= \dfrac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\dfrac{d\phi}{dt}\right)^2$

तथा ON की लम्ब दिशा में त्वरण $= \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{dt}\left(\rho^2 \dfrac{d\phi}{dt}\right)$

पुन: P का N के सापेक्ष NP दिशा में त्वरण $= \dfrac{d^2 z}{dt^2}$,

अत: P के त्वरण है :

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\dfrac{d\phi}{dt}\right)^2, & LP \text{ के अनुदिश;} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{dt}\left(\rho^2 \dfrac{d\phi}{dt}\right) & \text{तल } ZPK \text{ के लम्बवत्} \\ \text{तथा } \dfrac{d^2 z}{dt^2}, & OZ \text{ समान्तर।} \end{array}\right\} \quad \ldots(A)$$

अब चूँकि $z = r\cos\theta$ तथा $\rho = r\sin\theta$, अतएव

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta - 2\frac{dr}{dt}.\frac{d\theta}{dt}\sin\theta - r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \ldots(1)$$

तथा
$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\sin\theta + 2\frac{dr}{dt}.\frac{d\theta}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \ldots(2)$$

अत: त्वरण का OP के अनुदिश घटक

$$= \frac{d^2z}{dt^2}\cos\theta + \frac{d^2\rho}{dt^2}\sin\theta$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \quad \text{[समी. (1) तथा (2) से]}$$

तथा त्वरण का OP के लम्बवत् तल ZPK में घटक

$$= \frac{d^2\rho}{dt^2}\cos\theta - \frac{d^2z}{dt^2}\sin\theta$$

$$= 2\frac{dr}{dt}.\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad \text{[समी. (1) तथा (2) से]}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

पुन: LP के अनुदिश त्वरण $-\rho\left(\dfrac{d\phi}{dt}\right)^2$

(देखें (A), OP के अनुदिश $-\rho\sin\theta\left(\dfrac{d\phi}{dt}\right)^2$

तथा OP के लम्बवत् $-\rho\cos\theta\left(\dfrac{d\phi}{dt}\right)^2$ के तुल्य है।

अत: P का OP के अनुदिश त्वरण,

$$\alpha = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \rho\sin\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2;$$

P का OP के लम्बवत् तल ZPK में θ की बढ़ती दिशा में त्वरण,

$$\beta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) - \rho\cos\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) - r\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2.$$

तथा P का तल ZPK के लम्बवत् ϕ की बढ़ती दिशा में त्वरण,

$$\gamma = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\phi}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\frac{d\phi}{dt}\right).$$

§ 16·3. बेलनीय नियामकों के पदों में एक कण का त्वरण ज्ञात करना (To find Accelerations of a Particle in Terms of Cylindrical Co-ordinates.) (रायपुर 2004, 07; बिलासपुर 06,10)

माना नियत मूलबिन्दु O के सापेक्ष किसी समय t पर कण बिन्दु P पर है जिसके नियामक (ρ, ϕ, z) हैं, जहाँ

$ON = \rho$, $PN = z$ तथा तलों ZOP और ZOX के बीच के कोण $= \phi$;

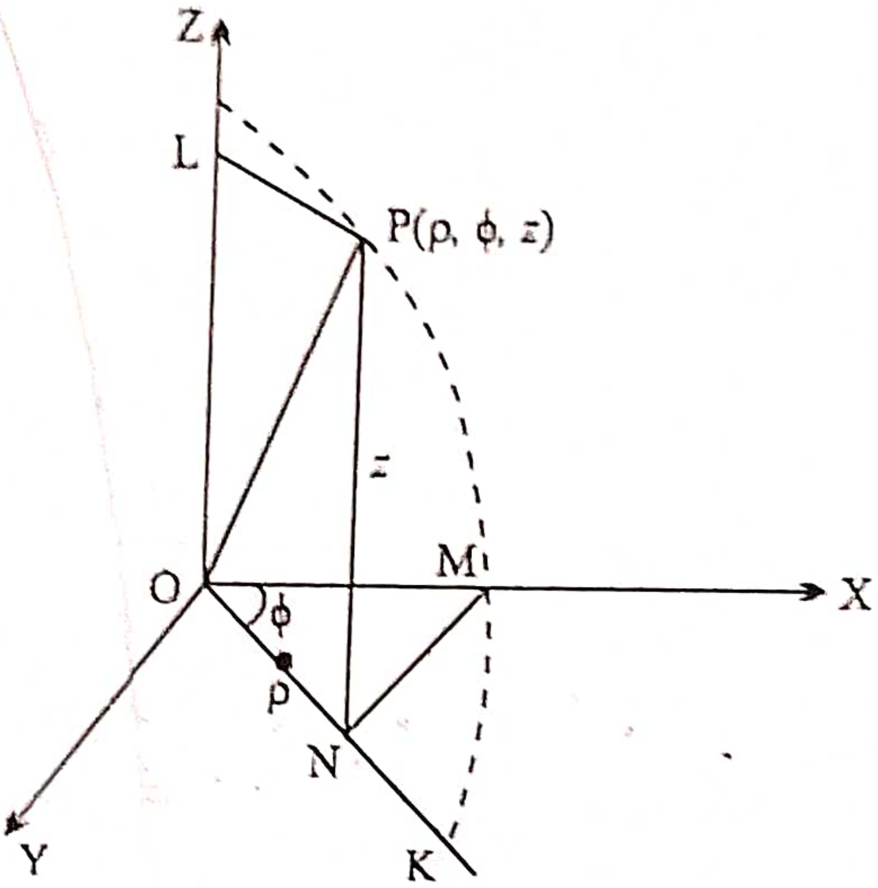
यहाँ P से XOY तल पर PN लम्ब है। तब N, जो XOY तल में है, के ध्रुवीय नियामक (ρ, ϕ) हैं।

अत: त्रिज्यीय एवं अनुप्रस्थ त्वरणों से हम पाते हैं कि

ON के अनुदिश त्वरण $= \dfrac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\dfrac{d\phi}{dt}\right)^2;$

तथा ON की लम्ब दिशा में त्वरण $=\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\phi}{dt}\right)$

पुन: P का N के सापेक्ष NP दिशा में त्वरण $=\frac{d^2z}{dt^2}$.



चित्र

अतएव P के बेलनीय नियामकों के पदों में त्वरण हैं :

$\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$, LP के अनुदिश;

$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\phi}{dt}\right)$, तल ZPK के लम्बवत्;

तथा $\frac{d^2z}{dt^2}$, OZ के समान्तर।

अब समी. (3) का समाकलन करने पर हम पाते हैं कि,

$$r^2\frac{d\phi}{dt}=A \qquad ...(5)$$

जहाँ A समाकलन अचर है।

अब समी. (4) तथा (5) से,

$$\frac{dr}{dt}=\sin\alpha\cot\beta.\frac{A}{r} \qquad ...(6)$$

अत: समी. (5) तथा (6) का उपयोग समी. (1) में करने पर हम पाते हैं कि

$$-F=-\sin^2\alpha\cot^2\beta.\frac{A^2}{r^3}-\sin^2\alpha.\frac{A^2}{r^3}$$

अर्थात् $F=\dfrac{A^2\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}.\dfrac{1}{r^3}=\dfrac{\mu}{r^3}$ ...(7)

यही अभीष्ट बल का नियम है।

पुन: $v^2=\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2+r^2\sin^2\alpha\left(\dfrac{d\phi}{dt}\right)^2$

$$=\frac{A^2\sin^2\alpha}{r^2\sin^2\beta}=\frac{\mu}{r^2}$$

$$\therefore \quad v=\frac{\sqrt{\mu}}{r}$$

पुन: समी. (2) से,

$$\frac{R}{m}=\frac{A^2\sin\alpha\cos\alpha}{r^3}=F.\frac{\sin^2\beta\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

समी. (4) से पथ का समीकरण है :

$$r=r_0e^{\sin\alpha\cot\beta\phi}.$$

उत्तर

उदाहरण 4. एक कण को क्षैतिज दिशा में एक चिकने अर्द्ध गोले, जिसका अक्ष उदग्र एवं शीर्ष नीचे की ओर है, के आंतरिक सतह के अनुदिश फेंका जाता है, प्रक्षेप बिन्दु निम्नतम बिन्दु से एक कोणीय दूरी β पर है, दर्शाइये कि प्रारम्भिक वेग जिससे कि कण अर्द्ध गोले के रिम (rim) पर ठीक चढ़ सके, $\sqrt{2ag\sec\beta}$ है।

(रायपुर 2006, 08, 09, 12; बिलासपुर 09,11,13)

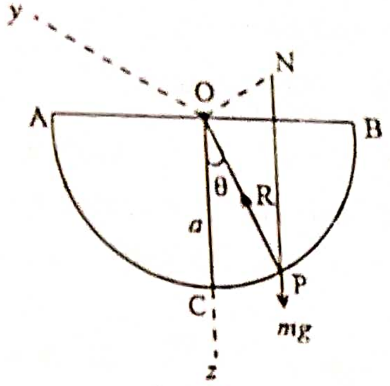
हल : यहाँ $r=a, \therefore \dfrac{dr}{dt}=0.$

अत: गति के समीकरण होंगे :

$$-a\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-a\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2=-\frac{R}{m}+g\cos\theta \qquad ...(1)$$

$$a\frac{d^2\theta}{dt^2}-a\cos\theta\sin\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2=-g\sin\theta \qquad ...(2)$$

तथा $$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta\frac{d\phi}{dt}\right)=0. \qquad ...(3)$$



चित्र

समी. (3) का समाकलन करने तथा प्रारम्भिक स्थितियों का उपयोग करने पर हम पाते हैं कि,

$$\sin^2\theta\frac{d\phi}{dt}=A \text{ (अचर) } =\frac{V\sin\beta}{a} \qquad ...(4)$$

समी. (4) से $\dfrac{d\phi}{dt}$ का मान समी. (2) में रखने पर हम पाते हैं कि,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{V^2\sin^2\beta}{a^2}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}-\frac{g}{a}\sin\theta$$

दोनों पक्षों में $2\dfrac{d\theta}{dt}.dt$ से गुणा कर समाकलन करने पर हम पाते हैं,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{V^2\sin^2\beta}{a^2}.\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{2g}{a}\cos\theta+\beta,$$

जहाँ B समाकलन अचर है।

प्रारम्भिक स्थिति से जब $\theta=\beta, \dfrac{d\theta}{dt}=0;$

$$\therefore B=\frac{V^2}{a^2}-\frac{2g}{a}\cos\beta$$

अत: $$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{V^2}{a^2}\left(1-\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\theta}\right)+\frac{2g}{a}(\cos\theta-\cos\beta)$$

चूँकि कण रिम पर ठीक चढ़ता है, इसलिए जब $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$\frac{d\theta}{dt} = 0$,

$$\therefore \qquad 0 = \frac{V^2}{a^2}(1 - \sin^2\beta) - \frac{2g}{a}\cos\beta$$

$$\Rightarrow \quad V^2 = 2ga\sec\beta$$

$$\therefore \qquad V = \sqrt{2ga\sec\beta}.$$

प्रमाणित।

उदाहरण 5. एक चिकना लम्बवृत्तीय शंकु, शीर्ष नीचे

उदाहरण 9. त्रिज्या a के गोले के क्षैतिज व्यास के सिरे से एक भारी कण आन्तरिक पृष्ठ के अनुदिश वेग V से प्रक्षेपित किया जाता है, प्रक्षेप की दिशा भूमध्य रेखा से β कोण बनाती है। यदि कण कभी-भी पृष्ठ को नहीं छोड़ता हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$3\sin^2\beta < 2 + \left(\frac{V^2}{3ga}\right)^2 \cdot \quad \text{(रायपुर 2005,10)}$$

हल : यहाँ $r = a, \therefore \ddot{r} = 0$

गति के समीकरण हैं :

$$m\left[0 - a\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - a\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right] = -R + mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow -a\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - a\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = -\frac{R}{m} + g\cos\theta \qquad ...(1)$$

$$m\left[\frac{1}{a}\frac{d}{dt}\left(a^2\frac{d\theta}{dt}\right)-a\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]$$

$$=-mg\sin\theta$$

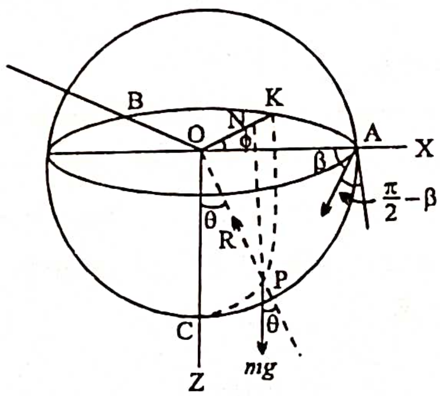
$$\Rightarrow \quad a\frac{d^2\theta}{dt^2}-a\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2=-g\sin\theta \quad ...(2)$$

तथा $\quad m\left[\frac{1}{a\sin\theta}\cdot\frac{d}{dt}\left(a^2\sin^2\theta\frac{d\phi}{dt}\right)\right]=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta\frac{d\phi}{dt}\right)=0 \quad ...(3)$$

समीकरण (3) का समाकलन करने पर,

$$\sin^2\theta\frac{d\phi}{dt}=C_1 \text{ (अचर)}$$



चित्र

चूँकि कण भूमध्य रेखा (अर्थात् क्षैतिज व्यास) से β कोण पर प्रक्षेपित किया जाता है, अतएव ऊर्ध्वाधर से प्रक्षेप कोण $\frac{\pi}{2}-\beta$ है।

इस प्रकार जब $\theta=\frac{\pi}{2}-\beta$, तब

$$\left[a\sin\theta\frac{d\phi}{dt}\right]_{\theta=\frac{\pi}{2}-\beta}=V$$

अर्थात् $\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}-\beta}=\frac{V}{a\cos\beta}$;

$$\therefore C_1=\cos^2\beta.\frac{V}{a\cos\beta}=\frac{V\cos\beta}{a}.$$

$$\therefore \quad \sin^2\theta\frac{d\phi}{dt}=\frac{V\cos\beta}{a} \quad ...(4)$$

अब समी. (4) से $\frac{d\phi}{dt}$ का मान समी. (2) में रखने पर,

$$a\frac{d^2\theta}{dt^2}-a\sin\theta\cos\theta.\left(\frac{V\cos\beta}{a\sin^2\theta}\right)^2=-g\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{V^2}{a^3}\cos^2\beta.\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}-\frac{g}{a}\sin\theta$$

दोनों पक्षों में $2\frac{d\theta}{dt}$ से गुणा कर समाकलन करने पर,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{V^2\cos^2\beta}{a^2\sin^2\theta}+\frac{2g}{a}\cos\theta+C_2$$

प्रारम्भिक स्थिति में जब कण विराम में है, तब $\theta=\frac{\pi}{2}, \beta=0$

तथा $\frac{d\theta}{dt}=0; \quad \therefore C_2=\frac{V^2}{a^2}$

$$\therefore \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{V^2\cos^2\beta}{a^2\sin^2\theta}+\frac{2g}{a}\cos\theta+\frac{V^2}{a^2} \quad ...(5)$$

अब समी. (4) तथा (5) का उपयोग समी. (1) में करने पर,

$$-a\left[-\frac{V^2\cos^2\beta}{a^2\sin^2\theta}+\frac{2g}{a}\cos\theta+\frac{V^2}{a^2}\right]$$

$$-a\sin^2\theta\left(\frac{V\cos\beta}{a\sin^2\theta}\right)^2=-\frac{R}{m}+g\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R}{m}=-\frac{V^2\cos^2\beta}{a\sin^2\theta}+2g\cos\theta+\frac{V^2}{a}$$

$$+\frac{V^2\cos^2\beta}{a\sin^2\theta}+g\cos\theta$$

$$= 3g\cos\theta + \frac{V^2}{a}$$

R शून्य होगा, जब $0 = 3g\cos\theta + \frac{V^2}{a}$;

$$\therefore \cos\theta = -\frac{V^2}{3ag} \quad ...(6)$$

पुनः $\frac{d\theta}{dt}$ शून्य होगा, जब

$$0 = -\frac{V^2\cos^2\beta}{a^2\sin^2\theta} + \frac{2g}{a}\cos\theta + \frac{V^2}{a^2},$$

[समी. (5) से]

अर्थात् $\cos^2\beta = \sin^2\theta\left(1 + \frac{2ag}{V^2}\cos\theta\right)$

$$= (1-\cos^2\theta)\left(1+\frac{2ag}{V^2}\cos\theta\right)$$

$$= \left(1 - \frac{V^4}{9a^2g^2}\right)\left(1 + \frac{2ag}{V^2}\cdot\frac{-V^2}{3ag}\right),$$

[समी. (6) से]

$$= \left(1 - \frac{V^4}{9a^2g^2}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \sin^2\beta = \frac{1}{3} - \frac{V^4}{27a^2g^2}$$

$$\Rightarrow \quad 3\sin^2\beta = 2 + \frac{V^4}{9a^2g^2}$$

चूँकि R ठीक शून्य है, जब

$$3\sin^2\beta = 2 + \left(\frac{V^2}{3ag}\right)^2$$

अतः कण कभी-भी पृष्ठ नहीं छोड़ेगा यदि

$$3\sin^2\beta < 2 + \left(\frac{V^2}{3ag}\right)^2.$$

प्रमाणित।

उदाहरण 10. एक चिकना शंक्वाकार पृष्ठ स्थिर अवस्था में रखा है, जिसका अक्ष ऊर्ध्वाधर तथा शीर्ष नीचे की ओर है। एक कण इसके अवतल पृष्ठ पर एक क्षैतिज वृत्त में सतत् गति में है और धीरे से छोड़ दिया जाता है। दर्शाइये कि सतत् गति के परितः लघु दोलन का समय है :

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{3g\cos\alpha}},$$

जहाँ α, शंकु का अर्द्ध-शीर्ष कोण है, और l, सतत् गति में वृत्त के जनक की लम्बाई है। (रायपुर 2013)

हल : यहाँ गति के समीकरण होंगे :

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right] = -mg\cos\alpha,$$

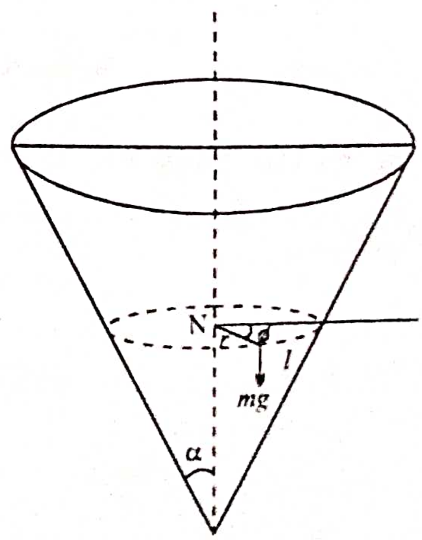
$$\left[\because \frac{d\theta}{dt} = 0, \theta = \alpha\,(\text{अचर})\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2r}{dt^2} - r\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = -g\cos\alpha \quad ...(1)$$

तथा $$m\left[\frac{1}{r\sin\alpha}\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\alpha\frac{d\phi}{dt}\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\phi}{dt}\right) = 0 \quad ...(2)$$

[$\because \alpha$, अचर है]



चित्र

समीकरण (2) का समाकलन करने पर,

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = C \quad \text{(अचर)}$$

जब $r = l, \left(\frac{d\phi}{dt}\right)_{r=l} = \omega, \ \therefore C = l^2\omega$

अतएव $$r^2 \frac{d\phi}{dt} = l^2\omega \quad ...(3)$$

समी. (3) से $\frac{d\phi}{dt}$ का मान समी. (1) में रखने पर,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{l^4\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha}{r^3} - g\cos\alpha \quad ...(4)$$

सतत् गति के लिए,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = 0, r = l$$

अतएव समी. (4) से,

$$0 = l\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha - g\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad g\cos\alpha = l\omega^2\sin\alpha\cos\alpha \quad ...(5)$$

$r = l + \rho$ रखने पर, जहाँ ρ छोटा है,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2\rho}{dt^2} \quad ...(6)$$

अतएव समी. (4), (5) तथा (6) से,

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{l^4\omega^2\sin\alpha\cos\alpha}{(l+\rho)^3} - l\omega^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= l\omega^2\sin\alpha\cos\alpha.\left(1 - \frac{3\rho}{l}\right) - l\omega^2\sin\alpha\cos\alpha,$$

(ρ^2 एवं इसके उच्चतम घातों को त्यागने पर)

$$= -\frac{3\rho}{l}.l\omega^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= -\frac{3}{l}g\cos\alpha.\rho, \quad \text{[समी. (5) से]}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\rho}{dt^2} = -\mu\rho, \text{ जहाँ } \mu = \frac{3g\cos\alpha}{l}$$

यह एक सरल आवर्त गति निरूपित करता है जिसका आवर्तकाल है :

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{3g\cos\alpha}}.$$

प्रमाणित।

प्रश्न 11. एक कण एक चिकने गोले पर पृष्ठ के दबाव के अतिरिक्त किसी भी वल के अधीन नहीं घूमता है। दर्शाइये कि इसका पथ समीकरण $\cot\theta = \cot\beta\cos\phi$ द्वारा दिया जाता है जहाँ θ तथा ϕ कोणीय नियामक हैं।

(वस्तर 2012; विलासपुर 04, 11, 12)

हल : प्रश्नानुसार, कण की गति का समीकरण r, θ तथा ϕ की दिशा में क्रमशः

$$\Rightarrow \quad a\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + a\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{R}{m} \quad ...(1)$$

जहाँ R कण पर पृष्ठ का दाब तथा m उसकी संहति है।

$$a\frac{d^2\theta}{dt^2} - a\cos\theta\sin\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \cos\theta\sin\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \quad ...(2)$$

तथा $$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(\sin^2\frac{d\phi}{dt}\right) = 0 \quad ...(3)$$

समी. (3) के समाकलन से,

$$\sin^2\theta\frac{d\phi}{dt} = C_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{C_1}{\sin^2\theta} \quad ...(4)$$

समीकरण (2) तथा (3) से $\frac{d\phi}{dt}$ का विलोपन करने पर,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \sin\theta\cos\theta.\frac{C_1^2}{\sin^4\theta} = \frac{C_1^2\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

इसे $2\frac{d\theta}{dt}$ से गुणा करके t के सापेक्ष समाकलित करने पर,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{C_1^2}{\sin^2\theta} + C_2 \quad ...(5)$$

प्रारम्भिक स्थिति में, जब $\theta = \beta$, तब $\frac{d\theta}{dt} = 0$

$$\therefore \quad C_2 = \frac{C_1^2}{\sin^2\beta}$$